Universitatea din Bucureşti **20.07.2013**

Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2013

Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră.

(a) Fie polinomul $P(X) = X^3 - mX^2 + (2m-1)X - 2 \in \mathbb{R}[X]$. Să se determine m pentru care P are rădăcina 1 şi în acest caz să se găsească toate rădăcinile complexe ale lui P.

(b) Să se arate că mulţimea $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor şi că $\mathcal{M}$ este inel comutativ împreună cu aceste operaţii.

(c) Matricea $\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ este element inversabil în inelul $\mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $|a^2 - 2b^2| = 1$.

(d) Inelul $\mathcal{M}$ are o infinitate de elemente inversabile.

II. Analiză. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

(a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} x f(x)$.

(b) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor graficului funcţiei f.

(c) Să se studieze convexitatea funcţiei f.

(d) Să se arate că $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)\,\mathrm{dx} = \ln 3$.

III. Geometrie.

(a) Fie ABC un triunghi cu laturile $AB = 4$, $AC = 6$ şi $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Să se calculeze înălţimea corespunzătoare laturii BC.

(b) Pe laturile AB şi AC ale unui triunghi ABC se consideră punctele D şi respectiv E, astfel încât $4\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ şi $4\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Pe dreptele BE şi CD se consideră punctele E' şi respectiv D', astfel încât $\overrightarrow{EE'} = 3\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{DD'} = 3\overrightarrow{CD}$. Să se arate că punctele D', A şi E' sunt coliniare.

(c) Să se determine parametrul real a pentru care dreptele de ecuaţii $d_1 : y = x$, $d_2 : y = 2x + 1$ şi $d_3 : x + ay + 1 = 0$ sunt concurente.

IV. Informatică. Se consideră o secvenţă de numere naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Din această secvenţă se pot obţine alte secvenţe folosind următoarea operaţie: se extrage elementul de pe poziţia i $(i > 1)$, se mută toate elementele situate la stânga poziţiei i cu o poziţie la dreapta, iar elementul de pe poziţia i se plasează pe prima poziţie a secvenţei.

(a) Să se realizeze un program care primind o secvenţă de numere naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ afişează toate secvenţele care se pot obţine din aceasta folosind o singură dată operaţia definită mai sus. Ordinea în care sunt afişate secvenţele rezultate nu contează. De exemplu din secvenţa 1,2,3 folosind o singură operaţie, mutând elementul de pe poziţia 2 se pot obtine secvenţa 2,1,3 şi mutând de pe poziţia 3 se obtine secvenţa 3,1,2.

(b) Să se realizeze un program care primind două permutari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale mulţimii $\{1, \ldots, n\}$ afişează o secvenţă de operaţii de tipul de mai sus prin care permutarea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se poate transforma în permutarea $y_1, y_2, \ldots, y_n$. O operaţie va fi afişată prin acel element x_i care se mută pe prima poziţie. De exemplu dacă se primesc permutările: 4,5,6,7,8,9,3,1,2 şi 4,9,6,5,7,8,3,1,2 o posibilă ieşire a programului este: 6,9,4 adică din prima permutare se extrage 6 şi se pune în faţă, apoi se extrage 9 şi se pune in faţă, iar apoi se extrage 4 si se pune in faţă.

Notă: Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.