



- format electronic -

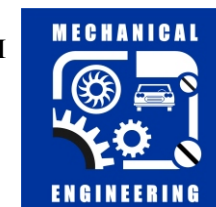


UNIVERSITATEA TEHNICA "GH. ASACHI" DIN IASI

FACULTATEA DE MECANICA

Bd. D. MANGERON NR. 61, IASI – 700050, ROMÂNIA

Tel / Fax: 0040 232 232337; <http://www.mec.tuiasi.ro>



TESTE
DE
MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ
PENTRU ADMITERE LA
FACULTATEA DE MECANICĂ

Autori:

Mircea ȘTEFANOVICI

Radu STRUGARIU

Dorin CONDURACHE

IAȘI - 2008

Cuprins

Prefață	5
Capitolul 1. Probleme Matematică	7
Capitolul 2. Probleme Fizică	27

Prefață

Prezenta culegere se adresează absolvenților care doresc să se pregătească temeinic în vederea concursului de admitere în învățământul superior.

Având în vedere diversitatea datorată existenței unui mare număr de manuale alternative, ca o consecință a procesului de reformă din învățământ am căutat să unificăm diferitele maniere de prezentare prin alegerea unor probleme pe care le considerăm indispensabile pentru abordarea cu succes a cursurilor de matematică și fizica din ciclul întâi de la Facultatea de Mecanica a Universitatii Tehnice "Gheorghe Asachi" din Iași.

La alcătuirea problemelor s-a avut în vedere o reprezentare corespunzătoare atât a părții de calcul, cât și a aspectelor de raționament. Gradul de dificultate al problemelor nefiind cel al unei olimpiade, acestea vor putea fi abordate de orice elev sau absolvent cu o pregătire medie a părții teoretice și care posedă deprinderi de calcul corespunzătoare.

Problemele sunt prezentate după modelul „test”, cu cinci răspunsuri fiecare, dintre care unul singur este corect. Pentru problemele cu un grad mai mare de dificultate, autorii au considerat necesar să dea indicații pentru rezolvare.

Ținând cont de faptul că prezenta carte va fi folosită și la întocmirea subiectelor pentru concursul de admitere la Facultatea de Mecanica a Universitatii Tehnice “Gheorghe Asachi” din Iași, invităm absolvenții de liceu să rezolve testele din acest volum, adăugându-și astfel cunoștințe noi la cele deja existente și implicându-se prin aceasta în demersul de evaluare a propriilor competențe.

CAPITOLUL 1

Probleme Matematică

PROBLEMA 1.1. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} \leq \frac{1}{2(x-1)}.$$

- a) $x \in (-\infty, -2)$; b) $x \in (-\infty, -1) \cup \left[0, \frac{2}{3}\right) \cup (1, 2)$; c) $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup [1, 2] \cup (3, \infty)$;
d) $x \in (-\infty, -2) \cup \left[0, \frac{2}{3}\right] \cup (1, 2)$; e) $x \in (1, 2) \cup (3, \infty)$.

SOLUȚIE 1.1. Trecând într-un singur membru și aducând la același numitor se obține $\frac{3x(3x-2)}{2(x-2)(x^2-4)} \leq 0$. Se sistematizează semnele factorilor într-un tabel. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.2. Să se rezolve inecuația :

$$|x| + x < x^2.$$

- a) $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$; b) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$; c) $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$; d) $x \in (3, \infty)$; e) $x \in \mathbb{R}$.

SOLUȚIE 1.2. Explicitând $|x|$, pentru $x < 0$ inecuația este verificată, iar pentru $x \geq 0$ se obțin soluțiile $x \in (2, \infty)$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.3. Să se afle minimul expresiei :

$$E = a^2 + 2b^2 - 3a + 3b,$$

pentru $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) -3 ; b) $-\frac{27}{8}$; c) $-\frac{9}{4}$; d) -1 ; e) 1 .

SOLUȚIE 1.3. Expresia se pune sub forma $E = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(b + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{27}{8} \geq -\frac{27}{8}$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.4. Să se determine $p, q \in \mathbb{R}$, dacă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + px + q$ are maximul egal cu 4 în punctul $x = -1$.

- a) $p = -2, q = 3$; b) $p = -1, q = 2$; c) $p = 3, q = -2$; d) $p = 2, q = -3$; e) $p = q = 1$.

SOLUȚIE 1.4. Maximul funcției $ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) se obține pentru $x = -\frac{b}{2a}$ și este egal cu $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.5. Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$, astfel încât inegalitatea:

$$(m-1)x^2 - (m+1)x + m + 1 \leq 0$$

să aibă loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $m \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$; b) $m \in (-\infty, -1]$; c) $m \in \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$; d) $m \in (-\infty, 1)$;

e) $m \in \left[-1, \frac{5}{3}\right]$.

SOLUȚIE 1.5. Trinomul de gradul al doilea $ax^2 + bx + c \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ în condițiile $a < 0$ și $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.6. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel ca rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației $x^2 - (2m-3)x + m - 1 = 0$ să satisfacă relația $3x_1 - 5x_1x_2 + 2x_2 = 0$.

a) $m_1 = 2, m_2 = 3$; b) $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{7}$; c) $m_1 = 2, m_2 = -2$; d) $m_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$; e) $m_{1,2} = \pm\sqrt{5}$.

SOLUȚIE 1.6. Relațiile lui Viète pentru ecuația dată sunt $x_1 + x_2 = 2m - 3$ și $x_1x_2 = m - 1$. Se formează un sistem împreună cu relația dată. Rezultă $x_1 = m + 1, x_2 = m - 4$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.7. Se dă ecuația $4x^2 - 4(m-1)x - m + 3 = 0$ și se cer valorile lui m astfel încât să avem $4(x_1^3 + x_2^3) = m - 1$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației date.

a) $m_1 = 1, m_2 = -2, m_3 = \frac{4}{3}$; b) $m_1 = 1, m_2 = -2, m_3 = \frac{3}{4}$; c) $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = \frac{3}{4}$; d) $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = -\frac{3}{4}$; e) $m_1 = -1, m_2 = -2, m_3 = -\frac{3}{4}$.

SOLUȚIE 1.7. Relațiile lui Viète pentru ecuația dată sunt $S = x_1 + x_2 = m - 1$ și $P = x_1x_2 = \frac{3-m}{4}$. Atunci $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2)x_1x_2 = S^3 - 3PS = \frac{(m-1)(4m^2 - 11m + 12)}{4}$. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.8. Să se rezolve ecuația irațională :

$$\sqrt{1-x^2} + x = 1.$$

a) $x_1 = 0, x_2 = 1$; b) $x_1 = -1, x_2 = 1$; c) $x_1 = -1, x_2 = 0$; d) $x_1 = 1, x_2 = 2$; e) $x_1 = 0, x_2 = 2$.

SOLUȚIE 1.8. Domeniul de existență al ecuației este $x \in [-1, 1]$. Ridicând la pătrat ($1-x \geq 0$) se obține $x^2 - x = 0$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.9. Rezolvați în \mathbb{R} inecuația :

$$|x^2 - 3x + 2| < |1 - x|.$$

a) $x \in (1, 3]$; b) $x \in (1, 3)$; c) $x \in (2, 4)$; d) $x \in [2, 4]$; e) $x \in (-1, 4]$.

SOLUȚIE 1.9. Se explicitază modulele și se rezolvă inecuația în cele trei cazuri. Altfel, inecuația dată este echivalentă cu $|x - 1||x - 2| < |x - 1|$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.10. Să se determine soluțiile reale ale sistemului :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 91 \\ x + y + \sqrt{xy} = 13 \end{cases}.$$

a) $\{(2, 1), (1, 2)\}$; b) $\{(1, 1)\}$; c) $\{(2, 2)\}$; d) $\{(1, 9), (9, 1)\}$; e) $\{(1, 3), (3, 1)\}$.

SOLUȚIE 1.10. Notând $x + y = S, xy = P$ sistemul devine $S^2 - P = 91, S + \sqrt{P} = 13$, de unde $S - \sqrt{P} = 7$. Deci $S = 10, P = 9$. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.11. Determinați valoarea lui x pentru care $e^x + e^{-x} = 2$.

a) 1; b) -1; c) 2; d) 0; e) -2.

SOLUȚIE 1.11. Notând $e^x = y$ rezultă ecuația $y + \frac{1}{y} = 2$ de unde $y = 1$. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.12. Să se rezolve inecuația:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}} > 3^{-x}.$$

a) $x \in (4, \infty)$; b) $x \in [-2, 1)$; c) $x \in (2, \infty)$; d) $x \in (1, \infty)$; e) $x \in (0, 10)$.

SOLUȚIE 1.12. Inecuația se scrie $3^{-\sqrt{x+2}} > 3^{-x}$ de unde $\sqrt{x+2} < x, x \geq 0$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.13. Să se rezolve ecuația :

$$\lg x^2 + 2\lg x = 23.$$

a) $x = 10$; b) $x = 100$; c) $x = 1000$; d) $x = 1$; e) $x = 2$.

SOLUȚIE 1.13. Ecuația se scrie $4\lg x = 8$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.14. Să se rezolve ecuația:

$$2\log_2(2x - 5) = \log_2(x^2 - 8)$$

a) $x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = 3$; b) $x_1 = \frac{11}{3}, x_2 = -3$; c) $x_1 = -\frac{11}{3}, x_2 = 3$; d) $x_1 = -\frac{11}{3}, x_2 = -3$; e) $x_1 = \frac{11}{3}$.

SOLUȚIE 1.14. Condițiile de existență a logaritmilor sunt $2x - 5 > 0$ și $x^2 - 8 > 0$. Ecuația devine $(2x - 5)^2 = x^2 - 8$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.15. Să se rezolve ecuația:

$$\log_{x^2}(x + 2) + \log_x(x^2 + 2x) = 4.$$

a) $x = 1$; b) $x = -1$; c) $x = 2$; d) $x = 4$; e) $x = 3$.

SOLUȚIE 1.15. Condiții de existență $x > 0, x \neq 1$. Alegând baza logaritmilor x , se obține ecuația $\frac{1}{2}\log_x(x + 2) + 1 + \log_x(x + 2) = 4$, de unde $\log_x(x + 2) = 2$ adică $x + 2 = x^2$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.16. Să se rezolve inecuația:

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geq \frac{3}{4}, a > 0, a \neq 1.$$

a) $x \in (a, \infty)$; b) $x \in [a, \infty)$; c) $x \in (\frac{a}{4}, \infty)$; d) $x \in (0, \infty)$; e) $x \in (3a, 4a)$.

SOLUȚIE 1.16. Condiția de existență este $x > 0$. Trecând toți logaritmi în baza a , se obține $\log_a x - \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{4}\log_a x \geq \frac{3}{4}$, de unde $\log_a x \geq 1$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.17. Se consideră expresia

$$E(x) = \log_4 x + \log_x 4.$$

Determinați valorile lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $E(x) < \frac{5}{2}$.

a) $x \in (1, 2)$; b) $x \in (0, 1) \cup (2, 16)$; c) $x \in [1, 2] \cup [16, 32]$; d) $x \in (16, \infty)$; e) $x \in (1, 2) \cup (20, \infty)$.

SOLUȚIE 1.17. Notând $\log_4 x = y (x > 0)$ se obține $y + \frac{1}{y} < \frac{5}{2}$. Se aduce la același numitor, dar se ține cont de semnul acestuia. Rezultă $y \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.18. Să se precizeze în care din mulțimile de mai jos se află toate numerele naturale n care verifică relația:

$$C_{3n-2}^n = A_{2n-1}^{n-1}$$

a) $A_1 = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$; b) $A_2 = \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4, 5, 6, 9, 30\}$; c) $A_3 = (9, 30)$; d) $A_4 = \{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$; e) $A_5 = \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 5, 7, 9, 30\}$.

SOLUȚIE 1.18. Ecuația dată se poate scrie: $\frac{(3n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)!} = 1$. Notând membrul stâng cu a_n deducem că $a_1 = 1$ și pentru $n \geq 2$, $(a_n)_{n \geq 2}$ este un șir strict descrescător. În plus, $a_2 = 2, a_3 = \frac{7}{4}, a_4 = 1$ și $a_n < 1$ pentru $n \geq 5$. Răspuns corect e).

PROBLEMA 1.19. Să se rezolve ecuația:

$$3C_{x+1}^2 + x \cdot P_2 = 4A_x^2.$$

a) $x = 3$; b) $x = 4$; c) $x = 5$; d) $x = 2$; e) $x = 7$.

SOLUȚIE 1.19. Condiții $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$. Ecuația se scrie $3 \frac{(x+1)x}{2} + 2x = 4x(x-1)$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.20. Câți termeni care nu conțin radicali sunt în dezvoltarea binomului $(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x})^{16}$?

a) un termen; b) doi termeni; c) trei termeni; d) nici unul; e) șase termeni.

SOLUȚIE 1.20. Termenul general al dezvoltării binomiale este

$$T_{k+1} = C_{16}^k \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{16-k} x^{\frac{k}{4}}, k \in \{0, 1, \dots, 16\}.$$

Exponentul lui x este un număr întreg, dacă $128 - 5k$ se divide prin 12. Acest lucru se întâmplă pentru $k = 4$ și $k = 16$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.21. Determinați valoarea celui mai mare coeficient binomial al dezvoltării binomului $(a+b)^n$, dacă suma tuturor coeficienților binomiali este egală cu 256.

a) 1; b) 8; c) 60; d) 70; e) 28.

SOLUȚIE 1.21. Suma coeficienților binomiali este $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n = 256$ pentru $n = 8$. Cel mai mare coeficient C_8^k este egal cu 70 pentru $k = 4$. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.22. Să se găsească primul termen a_1 și rația r unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ dacă :

$$a_2 - a_6 + a_4 = -7 \text{ și } a_8 - a_7 = 2a_4.$$

a) $a_1 = -4, r = 3$; b) $a_1 = -4, r = 4$; c) $a_1 = -3, r = 1$; d) $a_1 = -5, r = 2$; e) $a_1 = -2, r = 2$.

SOLUȚIE 1.22. Termenul general al unei progresii aritmetice este $a_n = a_1 + (n-1)r$. Condițiile date devin $a_1 - r = -7$ și $2a_1 + 5r = 0$. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.23. Suma a trei numere în progresie aritmetică este egală cu 12. Dacă se adaugă acestora, respectiv numerele 1, 2, 11, progresia devine geometrică. Să se afle aceste numere.

a) 5, 4, 7 și 15, 14, 13; b) 1, 4, 7 și 17, 4, -9; c) 6, 8, 10; d) 1, 3, 5 și 17, 15, 13; e) 5, 9, 13 și 18, 14, 10.

SOLUȚIE 1.23. Fie cele trei numere în progresie aritmetică $a - r, a, a + r$. Din prima condiție rezultă $a = 4$, deci numerele sunt $4 - r, 4$ și $4 + r$. A doua condiție se scrie $(5 - r)(15 + r) = r^2$, de unde $r = 3$ sau $r = -13$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.24. Să se calculeze expresia

$$E = \frac{1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n} - 2}{1 + a + a^2 + \dots + a^n - 1},$$

pentru $a \neq 1$.

a) $\frac{a^n + 1}{a + 1}$; b) $\frac{a^n + 1}{a}$; c) $\frac{a^{2n} + 1}{a^n + 1}$; d) a ; e) 1 .

SOLUȚIE 1.24. Suma progresiei geometrice $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$, $a \neq$

1. Atunci $1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n-2} = \frac{1 - a^{2n}}{1 - a^2}$, $a \neq 1$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.25. Să se determine valoarea parametrului real m astfel încât polinomul

$$P(x) = x^4 - x^2 + 2x - 1 + m$$

să se dividă cu $x + 1$.

a) 0 ; b) -1 ; c) 3 ; d) 1 ; e) -1 .

SOLUȚIE 1.25. Condiția este $P(-1) = m - 3 = 0$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.26. Fie P un polinom cu coeficienți reali. Dacă resturile împărțirii lui P la $x - a$ și $x - b$, ($a \neq b$) sunt egale, să se determine restul împărțirii lui P la polinomul $(x - a)(x - b)$.

a) $ax + b$; b) $bx + a$; c) $P(a)$; d) $bx + 1$; e) $x + a$.

SOLUȚIE 1.26. Resturile împărțirii lui P sunt $P(b) = P(a)$. Teorema împărțirii cu rest se scrie $P(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + R(x)$, unde restul $R(x) = mx + n$. Pentru $x = a$ și $x = b$ se obține $P(a) = ma + n = P(b) = mb + n$, de unde $m = 0$ și $n = P(a)$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.27. Determinați ordinul de multiplicitate $m \in \mathbb{N}$ al rădăcinii $x = 2$ a ecuației :

$$x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0.$$

a) 0 ; b) 1 ; c) 2 ; d) 3 ; e) 4 .

SOLUȚIE 1.27. Se aplică schema lui Horner

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -5 & 7 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & 0 & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & & \end{array}$$

iar ecuația $x^2 + x + 1$ nu are rădăcini reale. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.28. Determinați polinomul unitar de grad minim cu coeficienți raționali care admiteca rădăcini $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ și $x_2 = \frac{13}{2-i}$.

a) $13X^4 + 46X^3 - 13X^2 + 30X + 100$; b) $X^4 + 10X^3 - X^2 + 5$; c) $X^4 - 6X^3 + 17X^2 - 10X - 52$; d) $13X^4 - 46X^3 + 13X^2 + 30X - 100$; e) $X^4 - 3X^2 + 5X + 6$.

SOLUȚIE 1.28. $x_2 = 2 + 3i$. Polinomul admite și rădăcinile conjugate $x_3 = 1 - \sqrt{5}$, $x_4 = 2 - 3i$, prin urmare

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) \\ &= [X^2 - (x_1 + x_3)X + x_1x_3][X^2 - (x_2 + x_4)X + x_2x_4] \\ &= (X^2 - 2X - 4)(X^2 - 4X + 13). \end{aligned}$$

Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.29. Să se găsească valorile reale ale lui m pentru care numărul

$$M = 3i^{43} - 2mi^{42} + (1 - m)i^{41} + 5$$

este real ($i^2 = -1$).

a) $m = -1$; b) $m = -2$; c) $m = -\frac{5}{2}$; d) $m = 3$; e) $m = 1$.

SOLUȚIE 1.29. Deoarece $i^{4n} = 1$, rezultă $i^{40} = 1$, $i^{41} = i$, $i^{42} = -1$, $i^{43} = -i$, deci $M = 2m + 5 + i(-m - 2)$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.30. Să se determine toate numerele complexe $z \in \mathbb{C}$ care verifică ecuația

$$|z| - z = 1 + 2i.$$

a) $z = -\frac{1}{2} + i$; b) $z_1 = -\frac{1}{2} + i$, $z_2 = \frac{3}{2} - 2i$; c) $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{3}{2} + 2i$; d) $z = \frac{3}{2} - 2i$;
e) $z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i$.

SOLUȚIE 1.30. Se consideră $z = x + iy$, deci $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se obține sistemul $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x$, $y = -2$. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.31. Soluțiile ecuației $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$ sunt:
a) $i - 3$, $i - 2$; b) $3i$, $2 - i$; c) $2i$, $3 - i$; d) $2 - i$, $3 - i$; e) $5 - 2i$, $1 - i$.

SOLUȚIE 1.31. $z_{1,2} = \frac{1}{2}(-5 + 2i \pm 1)$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.32. Se consideră ecuația $(2 - i)z^2 - (7 + 4i)z + 6 + mi = 0$, în care $z \in \mathbb{C}$ este necunoscută, iar m este un parametru real. Să se determine valorile lui m pentru care ecuația admite o rădăcină reală.

a) $m \in \left\{-12, \frac{33}{5}\right\}$; b) $m = 32$; c) $m \in \{2, 5\}$; d) $m \in \left\{12, \frac{33}{4}\right\}$; e) $m \in \left\{0, \frac{33}{5}\right\}$.

SOLUȚIE 1.32. Ecuația se scrie $(2z^2 - 7z + 6) - i(z^2 + 4z - m) = 0$, așadar ecuațiile $2z^2 - 7z + 6 = 0$ și $z^2 + 4z - m = 0$ trebuie să aibă rădăcini comune. Prima ecuație are rădăcinile $z_1 = 2$ și $z_2 = \frac{3}{2}$. Din a doua ecuație se obține răspunsul corect d).

PROBLEMA 1.33. Să se calculeze rădăcina pătrată din numărul complex $z = -3 + 4i$, ($i = \sqrt{-1}$).
 a) $2 + i, 2 - i$; b) $1 + 2i, -1 + 2i$; c) $1 + 2i, -1 - 2i$; d) $-2 + i, 2 + i$; e) $1 - 2i, -1 - 2i$.

SOLUȚIE 1.33. Se consideră $z = x + iy$, deci $x^2 - y^2 + 2xyi = -3 + 4i$, de unde $x^2 - y^2 = -3$ și $y = \frac{2}{x}$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.34. Să se afle poziția celui de al treilea vârf al triunghiului echilateral, știind că afizele a două vârfuri sunt: $z_1 = 1, z_2 = 2 + i$.

a) $\frac{1}{2}[(3 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})]$; b) $\frac{1}{2}[(3 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})]$; c) $3 + i$; d) i ; e) $\frac{1}{2}[(3 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})]$ și $\frac{1}{2}[(3 + \sqrt{3}) + i(1 - \sqrt{3})]$.

SOLUȚIE 1.34. Condiția este :

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z_1 - z_2|,$$

de unde $(x - 1)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Răspuns corect e).

PROBLEMA 1.35. Să se rezolve ecuația matriceală

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; c) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; d) $X = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$; e) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUȚIE 1.35. X este o matrice cu 2 linii și 3 coloane $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$. Se obțin 2 sisteme pentru a, b, c și respectiv d, e, f . Altfel, ecuația $XA = B$ are soluția $X = BA^{-1}$. Răspuns corect e). Se verifică.

PROBLEMA 1.36. Care sunt soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} 4 - x & 1 & 4 \\ 1 & 2 - x & 2 \\ 2 & 4 & 1 - x \end{vmatrix} = 0?$$

a) $x_1 = 3, x_2 = 7, x_3 = -1$; b) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3$; c) $x_1 = 7, x_2 = 5, x_3 = -5$;
 d) $x_1 = x_2 = 7, x_3 = 1$; e) $x_1 = 7, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}$.

SOLUȚIE 1.36. Dezvoltând determinantul, se obține ecuația $x^3 - 7x^2 - 3x + 21 = 0$. Răspuns corect e).

PROBLEMA 1.37. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases} .$$

a) $x = 1, y = 2, z = 3$; b) $x = 2, y = 1, z = 1$; c) $x = 3, y = 2, z = 2$; d) $x = 1, y = 1, z = 4$; e) $x = 1, y = 3, z = 2$.

SOLUȚIE 1.37. Determinantul sistemului este egal cu $18 \neq 0$, deci se poate rezolva prin regula lui Cramer. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.38. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca sistemul:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \\ 5x + 4y = m \end{cases}$$

să fie compatibil.

a) 0; b) 1; c) 20; d) 23; e) 8.

SOLUȚIE 1.38. Din primele două ecuații se obțin $x = 3$ și $y = 2$, valori care trebuie să verifice și cea de-a treia ecuație. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.39. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel ca sistemul omogen :

$$\begin{cases} 2x + my + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

să fie compatibil nedeterminat.

a) 0; b) 1; c) -1; d) 2; e) -2.

SOLUȚIE 1.39. Un sistem omogen este întotdeauna compatibil, deoarece admite cel puțin soluția nulă. Pentru a fi nedeterminat este necesar ca determinantul sistemului să fie nul. $\Delta = -4 - 4m = 0$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.40. Pe \mathbb{R} se consideră legea de compoziție internă $*$ definită astfel:

$$x * y = 2xy - 2x - 2y + m, m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine m astfel încât această lege să fie asociativă.

a) $m = 1$; b) $m = -1$; c) $m = 2$; d) $m = 3$; e) $m = -2$.

SOLUȚIE 1.40. Din condiția de asociativitate $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ rezultă $4x + 2(m - 1)z = 2(m - 1)x + 4z$. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.41. În mulțimea $[0, +\infty)$ este definită legea de compoziție internă $*$ definită prin:

$$x * y = \frac{x^2 + y^2 + xy + x + y}{1 + x + y}.$$

Determinați elementul neutru al acestei legi.

a) 1; b) -1; c) $\frac{1}{2}$; d) 0; e) 2.

SOLUȚIE 1.41. Elementul neutru e trebuie să verifice $x * e = e * x = x, \forall x \in [0, +\infty)$. Acest lucru se transcrie $\frac{x^2 + e^2 + xe + x + e}{1 + x + e} = x$, de unde se obține $e(e + 1) = 0$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.42. Pe mulțimea \mathbb{R} se definesc legile de compoziție internă $*$ și \circ astfel: $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$a * b = 2a + 2b + 2ab + 1, a \circ b = 2a + 2b + ab + 2.$$

Sistemul

$$\begin{cases} (x + y) * 2 = 35 \\ (x - y) \circ 3 = 13 \end{cases}$$

are soluțiile:

a) $x = 3, y = 2$; b) $x = 1, y = 0$; c) $x = 2, y = 3$; d) $x = 2, y = 2$; e) $x = 1, y = 1$.

SOLUȚIE 1.42. Sistemul se transcrie $6x + 6y = 30$ și $5x - 5y = 5$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.43. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim legea de compoziție $*$ astfel:

$$x * y = (x + y - xy + 1),$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. Să se determine elementele simetrizabile și simetricul fiecăruia dintre acestea.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, x' = \frac{x+3}{x-1}$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x' = \frac{2x+1}{x+1}$; c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, x' = \frac{x-2}{2x-1}$; d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, x' = \frac{x+4}{2x-1}$.

SOLUȚIE 1.43. Elementul neutru e se află din ecuația $x * e = \frac{1}{2}(x + e - xe + 1) = x$, de unde $e = -1$. Elementul x' simetric elementului x satisface $x * x' = x' * x = e$, adică $\frac{1}{2}(x + x' - xx' + 1) = -1$. Se obține $x' = \frac{x+3}{x-1}$, pentru $x \neq 1$, deci răspunsul corect este a).

PROBLEMA 1.44. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x * y = ax + by, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

unde a și b sunt parametri reali. Legea $*$ definește pe \mathbb{R} o structură de grup pentru: a) $a = 1, b = 0$; b) $a = 0, b = 3$; c) $a = 0, b = 1$; d) $a = 1, b = 1$; e) $a = b = 2$.

SOLUȚIE 1.44. Din asociativitate se obține $a^2 = a$ și $b^2 = b$, iar din comutativitate ($x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{R}$) rezultă $a = b$. Răspuns corect d), legea de compoziție fiind adunarea.

PROBLEMA 1.45. Pentru ce valori ale parametrului real λ intervalul $(2, +\infty)$ este monoid în raport cu legea de compoziție definită pe \mathbb{R} prin:

$$x * y = xy - 2x - 2y + \lambda, \forall x, y \in \mathbb{R}?$$

a) $\lambda \in (-\infty, 6)$; b) $\lambda \in (6, +\infty)$; c) $\lambda = 6$; d) $\lambda = 0$; e) $\lambda \in (0, +\infty)$.

SOLUȚIE 1.45. Din condiția de asociativitate se obține $4x + (\lambda - 2)z = (\lambda - 2)x + 4z, \forall x, z \in \mathbb{R}$. Răspunsul corect este c), elementul neutru fiind $e = 3 \in (2, +\infty)$.

PROBLEMA 1.46. Fie \mathbb{Z} mulțimea numerelor întregi. Se știe că mulțimile $(\mathbb{Z}, *)$ și (\mathbb{Z}, \circ) au structură de grup în raport cu operațiile definite prin egalitățile :

$$x * y = x + y + 1, x \circ y = x + y - 1.$$

Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât funcția $f(x) = ax + 3 - a, f : (\mathbb{Z}, *) \rightarrow (\mathbb{Z}, \circ)$ să fie un izomorfism de grupuri.

a) $a = 1$; b) $a = 2$; c) $a = 3$; d) $a = 0$; e) $a = -1$.

SOLUȚIE 1.46. Condiția ce se impune este $f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Se obține $a(x + y + 1) + 3 - a = (ax + 3 - a) + (ay + 3 - a) - 1$. Răspuns corect e).

PROBLEMA 1.47. Fie inelul $(\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ unde:

$$x \oplus y = x + y + 2 \text{ și } x \otimes y = xy + 2x + 2y + 2.$$

Să se determine divizorii lui zero în acest inel.

a) $\{-2, 2\}$; b) $\{0, -1\}$; c) $\{-2, -4\}$; d) $\{2, 4\}$; e) nu există;

SOLUȚIE 1.47. Elementul zero este θ care satisface $x \oplus \theta = x + \theta + 2 = x$, deci $\theta = -2$. Divizorii lui zero (θ) sunt acele numere $x, y \in \mathbb{Z}$, dar diferite de zero (θ), care satisfac $x \otimes y = \theta$ (zero). Se obține $xy + 2x + 2y + 2 = -2$, adică $(x + 2)(y + 2) = 0$. Răspuns corect e).

PROBLEMA 1.48. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pe mulțimea \mathbb{R} se definesc legile de compoziție:

$$x \oplus y = ax + by - 2, x \otimes y = xy - 2x - 2y + c.$$

Să se determine a, b și c astfel încât $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ să fie un inel.

a) $a = b = c = 1$; b) $a = b = c = 6$; c) $a = b = 1, c = 6$; d) $a = b = c = 3$; e) $a = b = c = 2$.

SOLUȚIE 1.48. Din asociativitatea operației \oplus se obține $a^2x + aby + bz - 2a = ax + abz + b^2z - 2b, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$, de unde $a^2 = a, b^2 = b$ și $a = b$. Prin urmare $a = b = 1$ (nu pot fi nuli). Din asociativitatea operației \otimes se obține $4x + 4y + (c - 2)z - 2c = (c - 2)x + 4y + 4y - 2c, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.49. Legile $x \oplus y = x + y - 4$ și $x \otimes y = xy - 4x - 4y + 20$ determină pe \mathbb{R} o structură de corp comutativ. Să se determine elementele neutre ale corpului față de cele două legi.

a) 4, 5; b) 0, 1; c) 2, 0; d) 1, 1; e) 0, 0.

SOLUȚIE 1.49. Elementul neutru θ față de legea \oplus satisface $x \oplus \theta = x + \theta - 4 = x$, iar elementul neutru u față de legea \otimes satisface $x \otimes u = xu - 4x - 4u + 20 = x$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.50. Care sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{1} \\ \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2} \end{cases}$$

în \mathbb{Z}_{12} (inelul claselor de resturi modulo 12)?

a) $x = \hat{2}, y = \hat{7}$; b) $x = \hat{1}, y = \hat{4}$; c) $x = \hat{10}, y = \hat{3}$; d) incompatibil; e) $x = \hat{11}, y = \hat{2}$.

SOLUȚIE 1.50. Înmulțind prima ecuație cu $\hat{3}$, a doua cu $\hat{2}$ și adunându-le, se obține $(\hat{9} + \hat{8})x + (\hat{6} + \hat{6})y = \hat{3} + \hat{4}$, adică $\hat{5}x = \hat{7}$. Singura soluție este $x = \hat{11}$. Înlocuind în sistem rezultă $\hat{2}y = \hat{4}$ și $\hat{3}y = \hat{6}$ cu singura soluție comună $y = \hat{2}$. Deci răspunsul corect este e).

PROBLEMA 1.51. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) 2; d) $\frac{1}{3}$; e) 0.

SOLUȚIE 1.51. Termenul general se scrie

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.52. Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$a_n = \frac{3n}{n!}$$

a) 1; b) 0; c) 3; d) 1; e) 2.

SOLUȚIE 1.52. Termenul $a_{n+1} = \frac{3(n+1)}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}a_n < a_n$, pentru $n > 2$. Așadar șirul este monoton descrescător. Deoarece este și mărginit $0 < a_n \leq a_2$, șirul are limită finită L . Trecând la limită în relația de recurență $a_{n+1} = \frac{3}{n+1}a_n$, se obține $L = 0 \cdot L$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.53. Să se calculeze:

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(2 - \sqrt{x-3})}{(x^2 - 49)}$$

a) $-\frac{1}{56}$; b) $\frac{1}{56}$; c) $\frac{1}{48}$; d) $\frac{1}{48}$; e) 0.

SOLUȚIE 1.53. Amplificând fracția cu $2 + \sqrt{x-3}$ și apoi simplificând prin $x-7$ se obține $-\frac{1}{(2 + \sqrt{x-3})(x+7)}$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.54. Să se determine:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) 0; d) 1; e) nu există.

SOLUȚIE 1.54. Au loc inegalitățile $0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.55. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + px - 1}{x + 1}$, unde $p \in \mathbb{R}$. Să se determine p astfel încât graficul funcției să admită asimptotă dreaptă $y = x + 1$ la $+\infty$.

a) 1; b) 2; c) 3; d) -1; e) -2; f) -3.

SOLUȚIE 1.55. Panta asimptotei $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, iar $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(p-1)x - 1}{x + 1} = p - 1 = 1$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.56. Se consideră funcția $f : (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$. Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul lui f .

a) $y = x$; b) $y = x - 2$; c) $y = -x + 2$; d) $y = -x$; e) nu există.

SOLUȚIE 1.56. Funcția nu are asimptotă orizontală deoarece

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x}} = +\infty.$$

Panta asimptotei oblice este $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{4}{x}} = -1$. Atunci $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + x) = 2$ (se amplifică cu conjugatul $\sqrt{x^2 - 4x} - x$). Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.57. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - a, & x < -1 \\ x - b, & x \in [-1, 1] \\ x^2 + a, & x > 1 \end{cases}$$

este continuă pe \mathbb{R} dacă:

a) $a = b = 0$; b) $a = 2, b = 0$; c) $a = 0, b = 1$; d) $a = 2, b = 1$; e) $a = b = 1$.

SOLUȚIE 1.57. Limitele laterale ale funcției în punctele 1 și -1 trebuie să fie egale. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.58. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1) \ln x$. Să se calculeze $f'(1)$.

a) 1; b) 2; c) 3; d) 0; e) -1.

SOLUȚIE 1.58. $f'(x) = \ln x + (x+1)\frac{1}{x}$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.59. Să se determine parametrii reali a și b astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe \mathbb{R} .

a) $a = 4, b = 0$; b) $a = 3, b = 0$; c) $a \in \mathbb{R}, b = 5$; d) $a = 3, b \in \mathbb{R}$; e) $a = 4, b = -1$.

SOLUȚIE 1.59. Funcția este necesar să fie continuă în $x = 2$, de unde $a + b = 4$. Din egalitatea derivatelor laterale în $x = 2$ rezultă $a = 4$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.60. Să se determine coeficientul unghiular al tangentei în punctul (e, e^2) la graficul funcției $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + x^2 - 1$.

a) $e - 1$; b) $1 - e^2$; c) $1 + 2e^2$; d) $\frac{1}{e} + 2e - 1$; e) $\frac{1}{e} - 1$.

SOLUȚIE 1.60. Coeficientul unghiular căutat este $m = f'(e)$, unde $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 1$. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.61. Se consideră funcțiile $f(x) = x^2$ și $g(x) = -x^2 + 4x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Să se afle c astfel încât graficele lui f și g să aibă o tangentă comună într-un punct de intersecție a curbelor.

a) $c = 1$; b) $c = -2$; c) $c = \frac{1}{2}$; d) $c = 2$; e) $c = -1$.

SOLUȚIE 1.61. În punctul x de intersecție $f(x) = g(x)$, iar dacă tangenta la grafice este comună $f'(x) = g'(x)$. Din această ultimă relație rezultă $x = 1$. Răspuns corect b).

PROBLEMA 1.62. Să se afle soluția inecuației $\ln(x^2 + 1) > x$.

a) $x \in (0, +\infty)$; b) $x \in (-\infty, 1)$; c) $x \in (-\infty, 0)$; d) $x \in (1, +\infty)$; e) $x \in (-1, +\infty)$.

SOLUȚIE 1.62. Fie $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$, funcție definită pe \mathbb{R} . Derivata sa este $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 1 = \frac{-(x-1)^2}{(x^2 + 1)} < 0$, deci f este descrescătoare pe \mathbb{R} . Deoarece $f(0) = 0$, rezultă $f(x) > f(0)$ pentru $x < 0$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.63. Să se determine valorile parametrului real m pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x^2) - mx$ este monoton crescătoare pe \mathbb{R} .

a) $(-1, 0]$; b) $[1, +\infty)$; c) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; d) $(-\infty, -1]$; e) $[-1, 1]$.

SOLUȚIE 1.63. $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, adică $-mx^2 + 2x - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci $m < 0$ și $\Delta = 4 - 4m^2 \leq 0$. Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.64. Să se afle punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x^4 - 10x^2$, precizând natura lor.

a) $-\sqrt{5} = \min, 0 = \max, \sqrt{5} = \min$; b) $0 = \max, 5 = \min$; c) $-\sqrt{5} = \min, \sqrt{5} = \max$; d) $0 = \max, \sqrt{5} = \max$; e) $-\sqrt{5} = \max, 0 = \min, \sqrt{5} = \min$.

SOLUȚIE 1.64. Din $f'(x) = 4x^3 - 20x = 0$ rezultă $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{5}$ și $x_3 = -\sqrt{5}$. Tabloul de variație al funcției $f(x)$ stabilește răspunsul corect a).

PROBLEMA 1.65. Să se determine mulțimea punctelor de inflexiune pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

a) $\{0, 3\}$; b) $\{0\}$; c) $\{0, 1\}$; d) \emptyset ; e) $\{1\}$.

SOLUȚIE 1.65. $f''(x) = 6x - 6 = 0$, rezultă $x = 1$, punct în care f'' își schimbă semnul. Răspuns corect e).

PROBLEMA 1.66. Fie $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in (0, 1)$. Considerăm proprietățile:

$P_1 : x_0$ este punct de extrem local al funcției f

$P_2 : x_0$ este punct de inflexiune

$P_3 : x_0$ este punct de întoarcere al graficului funcției f

$P_4 : f'(x_0) = 0$

Care din următoarele implicații este adevărată ?

a) $P_1 \Rightarrow P_4$; b) $P_4 \Rightarrow P_1$; c) $P_3 \Rightarrow P_1$; d) $P_3 \Rightarrow P_2$; e) $P_2 \Rightarrow P_4$.

SOLUȚIE 1.66. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.67. Fie m și M valorile extreme ale funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + ax + b (a, b \in \mathbb{R}, a < 0).$$

Să se calculeze produsul $m \cdot M$ în funcție de a și b .

a) $\frac{a^3}{3} + b^2$; b) $27\frac{a^3}{4} + b^2$; c) $b^2 + 4\frac{a^3}{27}$; d) $a^2 + b^2$; e) 1.

SOLUȚIE 1.67. $f'(x) = 3x^2 + a = 0$, rezultă $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$, puncte în care f are valori extreme. $m \cdot M = f(x_1) \cdot f(x_2)$. Răspuns corect c).

PROBLEMA 1.68. Să se afle mulțimea valorilor lui $p \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația $3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + p = 0$ are rădăcină dublă negativă.

a) $\{-23, -16\}$; b) $\{-23, 16\}$; c) $\{23, -16\}$; d) $\{23\}$; e) $\{16\}$.

SOLUȚIE 1.68. Fie $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x + p$, de unde $f'(x) = 12(x^3 + x^2 - 4x - 4)$. Rădăcina dublă este rădăcină comună a ecuațiilor $f(x) = 0$ și $f'(x) = 0$. Derivata are rădăcini negative $x_1 = -1$ și $x_2 = -2$. Din $f(-1) = 0$ și $f(-2) = 0$ rezultă răspunsul corect a).

PROBLEMA 1.69. Să se precizeze în care din intervalele de mai jos se află punctul c din teorema lui Lagrange aplicată funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și intervalului $[1, 2]$.

a) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$; b) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$; c) $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$; d) $\left(\frac{7}{4}, 2\right)$; e) $(0, 1)$.

SOLUȚIE 1.69. Funcția f este continuă pe $[1, 2]$, derivabilă pe $(1, 2)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$. Atunci există $c \in (1, 2)$ astfel încât $f'(c) = f(2) - f(1)$. Rezultă $c = \frac{1}{\ln 2}$. Deoarece $e^2 < 8$, prin logaritmare se obține $2 < 3\ln 2$, de unde $c = \frac{1}{\ln 2} < \frac{3}{2}$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.70. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}.$$

Precizați care din următoarele funcții reprezintă o primitivă a funcției f :

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}; F_2(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c, & x \leq 0 \\ e^x + c, & x > 0 \end{cases};$$

$$F_3(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x, & x \leq 0 \\ e^x - 1, & x > 0 \end{cases}.$$

a) toate; b) nici una; c) F_1 ; d) F_2 ; e) F_3 .

SOLUȚIE 1.70. f este o funcție continuă, deci admite primitive (funcții derivabile $F(x)$, cu $F'(x) = f(x)$). Toate funcțiile $F_i'(x) = f(x)$, pentru $x \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), dar numai F_3 este continuă (și derivabilă) și în $x = 0$. Răspuns corect e).

PROBLEMA 1.71. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x^2 - 2x + 1}.$$

Să se găsească numerele reale m, n și p astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{mx^3 + nx^2 + px}{x - 1}$$

să fie primitivă pentru f .

a) $m = 1, n = 27, p = 9$; b) $m = 1, n = \frac{9}{2}, p = 27$; c) $m = \frac{1}{2}, n = \frac{9}{2}, p = 27$; d) $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{9}{2}, p = 27$; e) $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{9}{2}, p = 27$;

SOLUȚIE 1.71. $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. $F'(x) = \frac{2mx^3 + (n - 3m)x^2 - 2nx - p}{(x - 1)^2}$. Identificând cu $f(x)$ se obține răspunsul corect c).

PROBLEMA 1.72. *Calculați integrala nedefinită $\int \frac{x+1}{x} dx$ pentru orice $x \in (a, b)$, unde $0 \notin (a, b)$.*

a) $1 + \ln x + C$; b) $\ln |x+1| + C$; c) $x - \frac{1}{x^2} + C$; d) $x + \ln |x| + C$; e) $x + \frac{1}{x^2} + C$.

SOLUȚIE 1.72. *Integrala se scrie $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int dx + \int \frac{1}{x} dx$. Răspunsul corect este d).*

PROBLEMA 1.73. *Calculați integrala nedefinită*

$$\int \left(\frac{e^x}{e^{2x}} + 2 \right) dx.$$

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^x}{\sqrt{2}} \right) + C$; b) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^x}{2} \right) + C$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{e^x}{2} \right) + C$;

d) $\operatorname{arctg} (e^{2x} + 2) + C$; e) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (e^{2x} + 2) + C$.

SOLUȚIE 1.73. *Integrala devine $\int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C$, unde $t = e^x$. Răspuns corect a).*

PROBLEMA 1.74. *Să se calculeze primitivele funcției: $\varphi(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x, x \in \mathbb{R}$*

a) $(x^2 - 2x - 1)e^x + C$; b) $(x^2 - 4x + 3)e^x + C$; c) $(x^2 - 1)e^x + C$; d) $(x^2 - 2x - 1)e^x$;
e) $(x^2 - 4x - 1)e^x$.

SOLUȚIE 1.74. *Integrând prin părți ($\int f \cdot g' dx = fg - \int f' \cdot g dx$, cu $f(x) = x^2 - 2x - 1$ și $g'(x) = e^x$) se obține $\int \varphi(x) dx = (x^2 - 2x - 1)e^x - \int (2x - 2)e^x dx$. Integrând încă o dată prin părți ($f(x) = 2x - 2$ și $g'(x) = e^x$) se obține răspunsul corect b).*

PROBLEMA 1.75. *Să se calculeze $I = \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + 1\right) dx$.*

a) $\frac{7}{5}$; b) $\frac{5}{2}$; c) 5; d) $\frac{5}{7}$; e) $\frac{2}{5}$.

SOLUȚIE 1.75. $I = \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^1 + x \Big|_0^1$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.76. *Fie funcția $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Să se determine $c \in (1, 3)$ astfel încât*

$$\int_1^3 f(x) dx = 2f(c).$$

a) $\frac{1}{3}$; b) $\pm \sqrt{\frac{13}{3}}$; c) $\pm \sqrt{\frac{28}{3}}$; d) 2; e) $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

SOLUȚIE 1.76. $\int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{26}{3} = 2c^2$. Răspuns corect e).

PROBLEMA 1.77. Să se calculeze integrala $I = \int_0^2 f(x) dx$ știind că $f(0) = 1$,

iar $f'(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{pentru } x \in [0, 1] \\ x - 1, & \text{pentru } x \in (1, 2] \end{cases}$.

a) $I = 1$; b) $I = 2$; c) $I = 3$; d) $I = \frac{3}{2}$; e) $I = \frac{2}{3}$.

SOLUȚIE 1.77. $f(x) = \int f'(x) dx = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} + C_1, & \text{pentru } x \in [0, 1] \\ \frac{x^2}{2} - x + C_2, & \text{pentru } x \in (1, 2] \end{cases}$,

funcție continuă. Din continuitatea în $x = 1$ rezultă $C_2 = C_1 + 1$, iar din condiția

$f(0) = 1$ rezultă $C_1 = 1$. Așadar $f(x) = \begin{cases} 1 + x - \frac{x^2}{2}, & \text{pentru } x \in [0, 1] \\ 2 - x + \frac{x^2}{2}, & \text{pentru } x \in (1, 2] \end{cases}$. Atunci

$I = \int_0^1 \left(1 + x - \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_1^2 \left(2 - x + \frac{x^2}{2}\right) dx$. Răspuns corect a).

PROBLEMA 1.78. Calculați valoarea integralei: $I = \int_{-2}^2 (|x - 1| + |x + 1|) dx$.

a) 8; b) 5; c) 10; d) 9; e) 7.

SOLUȚIE 1.78. Explicând modulele

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}, \quad |x + 1| = \begin{cases} x + 1, & x \geq -1 \\ -x - 1, & x < -1 \end{cases},$$

rezultă $I = \int_{-2}^{-1} (1 - x - x - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x + x + 1) dx + \int_1^2 (x - 1 + x + 1) dx$. Răspuns corect

c).

PROBLEMA 1.79. Să se calculeze integrala: $I = \int_2^3 \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} dx$.

a) $I = \frac{3}{2} - 4\ln 2$; b) $I = -\frac{1}{2} - 4\ln 2$; c) $I = -\frac{3}{2} + 4\ln 2$; d) $I = \frac{3}{2} + 4\ln 2$; e) $I = -\frac{1}{2} + 4\ln 2$.

SOLUȚIE 1.79. *Integrala se scrie* $I = \int_2^3 \left(x-1 + \frac{4}{x-1}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x-1|\right) \Big|_2^3$.

Răspuns corect d).

PROBLEMA 1.80. *Să se calculeze* $I = \int_0^1 x \arctg x dx$.

a) $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; b) $I = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}$; c) $I = \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2}$; d) $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$; e) $I = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}$.

SOLUȚIE 1.80. *Integrând prin părți* ($f(x) = \arctg x, g'(x) = x$, deci $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, g(x) = \frac{x^2}{2}$) rezultă

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \arctg x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \arctg x \Big|_0^1. \end{aligned}$$

Răspuns corect a).

CAPITOLUL 2

Probleme Fizică

PROBLEMA 2.1. Care din următoarele afirmații este falsă:

- A. curba descrisă de un mobil în timpul mișcării sale se numește traiectorie;
- B. în cazul mișcării rectilinii, coordonata x a corpului este distanța de la originea O până la corp;
- C. legea mișcării (ecuația cinematică a mișcării rectilinii) este $x=f(t)$, unde t este timpul;
- D. pentru a descrie mișcarea unui corp în plan trebuie să cunoaștem $x = f(t_1); x = f(t_2)$, unde t_1 și t_2 sunt două momente în timpul mișcării;
- E. mișcarea plană a mobilului se descompune în două mișcări rectilinii după două axe alese.

PROBLEMA 2.2. Proiecția unui vector pe o direcție este:

- A. maximă când vectorul face un unghi de 0° cu direcția;
- B. maximă când vectorul face un unghi de 30° cu direcția;
- C. maximă când vectorul face un unghi de 45° cu direcția;
- D. maximă când vectorul face un unghi de 60° cu direcția;
- E. maximă când vectorul face un unghi de 90° cu direcția.

PROBLEMA 2.3. Care este timpul necesar unei bărci pentru a traversa un râu:

- a) pe drumul cel mai scurt, t_1 ;
- b) în timpul cel mai scurt, t_2 .

Se dau: viteza râului v , lățimea râului d , viteza bărcii față de apă u ($u > v$).

(Aplicație numerică $d=20$ m, $u=5$ m/s, $v=3$ m/s).

- A. $\begin{cases} t_1 = 5s \\ t_2 = 4s \end{cases}$;
- B. $\begin{cases} t_1 = 6s \\ t_2 = 5s \end{cases}$;
- C. $\begin{cases} t_1 = 5s \\ t_2 = 6s \end{cases}$
- D. $\begin{cases} t_1 = 6s \\ t_2 = 7s \end{cases}$;
- E. $\begin{cases} t_1 = 5s \\ t_2 = 8s \end{cases}$.

PROBLEMA 2.4. Indicatorul orelor și indicatorul minutelor se suprapun perfect la ora 12. Să se determine timpul minim după care cele două se suprapun din nou.

- A. $t = 3823, 2s$;
- B. $t = 4236, 4s$;
- C. $t = 4029, 3s$;
- D. $t = 3927, 2s$;
- E. $t = 12$ ore.

PROBLEMA 2.5. Un tren trece cu viteza $v=20$ m/s paralel cu un zid lung care se află la o distanță necunoscută x . Un călător din tren emite un semnal sonor și după 3 secunde aude ecoul. Dându-se viteza sunetului $v_s = 340$ m/s să se determine distanța x .

- A. $x = \frac{2}{t}(v_s^2 - v^2) = 50,9m;$
 B. $x = \frac{t}{2}(v_s^2 - v^2) = 5,09m;$
 C. $x = \frac{t}{2}\sqrt{v_s^2 - v^2} = 509m;$
 D. $x = \frac{t}{2}\sqrt{v_s^2 + v^2} = 509m;$
 E. $x = v_0 \cdot t = 340 \cdot t = 1020m.$

PROBLEMA 2.6. *Viteza momentană a unui punct material are una din următoarele caracteristici:*

- A. *are aceeași valoare față de orice sistem de referință;*
 B. *se modifică în timpul mișcării, dacă mișcarea este rectilinie uniformă;*
 C. *este tangentă la traiectoria urmată de punctul material;*
 D. *este tangentă la punctul material în tot timpul mișcării;*
 E. *este normală la raza vectoare momentană a punctului material.*

PROBLEMA 2.7. *Traietoria unui punct de pe elicea unui avion aflat în mișcare rectilinie uniformă, este un punct față de:*

- A. *avion;*
 B. *un călător din avion;*
 C. *centrul elicei;*
 D. *un observator de pe Pământ;*
 E. *alt punct al elicei.*

PROBLEMA 2.8. *Care sunt cele două unități de măsură necesare pentru a descrie viteza?*

- A. *amperul și metrul;*
 B. *metrul și secunda;*
 C. *candela și secunda;*
 D. *amperul și secunda;*
 E. *amperul și candela.*

PROBLEMA 2.9. *Asupra unui corp cu masa $m = 4$ kg ce se deplasează fără frecare pornind din repaus și din originea axelor de coordonate, acționează forța variabilă $F(t) = (2 + 8t)N$, unde t este exprimat în secunde. Viteza corpului la momentul $t_1 = 6$ s de la începutul mișcării este:*

- A. $v = 25$ m/s;
 B. $v = 39,8$ m/s;
 C. $v = 82$ m/s;
 D. $v = 150$ m/s;
 E. $v = 39$ m/s.

PROBLEMA 2.10. *În mișcarea rectilinie și uniform variată, fără viteză inițială, distanța x parcursă de corp este proporțională cu:*

- A. $v^2;$ B. $v;$ C. $v^3;$
 D. $\sqrt{v};$ E. $\sqrt{v^3}.$

PROBLEMA 2.11. *Un fir inextensibil, de care este atârnată o bilă de masă m , este deviat cu unghiul φ_0 de la verticală și apoi este lăsat liber. Se cere să se calculeze tensiunea în fir în funcție de unghiul φ ($\varphi < \varphi_0$).*

- A. $T = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0);$

- B. $T = mg(\cos \varphi - 2 \cos \varphi_0)$;
 C. $T = mg(3 \cos \varphi - \cos \varphi_0)$;
 D. $T = mg(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$;
 E. $T = \frac{mg}{(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0)}$.

PROBLEMA 2.12. *Expresia corectă pentru forța de inerție este:*

- A. $\vec{F}_i = m\vec{a}$;
 B. $F_i = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$;
 C. $\vec{F}_i = -m\vec{a}$;
 D. $F_i = kx$;
 E. $F_i = -kx$.

PROBLEMA 2.13. *Un copil aflat într-un vagon aruncă o minge vertical în sus. În ce condiții mingea revine în mâinile sale:*

- A. *vagonul se mișcă uniform rectiliniu;*
 B. *vagonul se mișcă rectiliniu uniform accelerat;*
 C. *vagonul se mișcă rectiliniu uniform încetinit;*
 D. *vagonul se mișcă uniform circular;*
 E. *nici un răspuns nu este corect.*

PROBLEMA 2.14. *Componenta paralelă cu planul înclinat a greutății imprimă corpului o accelerație:*

- A. $a = \frac{F}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha$;
 B. $a = g \cos \alpha$; C. $a = g \sin \alpha$;
 D. $a = \frac{g}{\sin \alpha}$; E. $a = \mu g$.

PROBLEMA 2.15. *Forța gravitațională dintre două corpuri punctiforme cu masele m_1 și m_2 este dată de expresia:*

- A. $F = mg$; B. $F = k \frac{m_1 - m_2}{r^2}$;
 C. $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} g$; D. $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$;
 E. $F = k \frac{m_1 m_2}{m_1 m_2}$.

PROBLEMA 2.16. *Un corp aruncat orizontal din vârful unui plan înclinat spre baza sa a căzut pe planul înclinat la distanța $l = 30$ m de vârf. Cu ce viteză inițială v_0 a fost aruncat corpul? Unghiul de înclinare al planului față de orizontală este $\alpha = 30^\circ$; se consideră $g = 10$ m/s².*

- A. $v_0 = 7,5$ m/s; B. $v_0 = 15$ m/s;
 C. $v_0 = 65,80$ m/s; D. $v_0 = 12$ m/s;
 E. $v_0 = 30$ m/s.

PROBLEMA 2.17. *Teorema de variație a energiei cinetice se va scrie:*

- A. $\Delta E_c = E_{c1} - E_{c2}$ sau $L = E_{c1} - E_{c2}$ sau $Fd = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$;
 B. $\Delta E_c = E_{p1} - E_{c2}$;
 C. $L = E_c - E_p$;
 D. $L = \Delta E_c = E_{p1} - E_{p2}$;

$$E. \quad L = \frac{mv^2}{2}.$$

PROBLEMA 2.18. *Un corp este aruncat pe verticală în sus de la suprafața pământului cu viteza $v_0 = 10 \text{ m/s}$. La ce înălțime energia cinetică a corpului este egală cu energia sa potențială? (se va lua $g = 10 \text{ m/s}^2$)*

$$\begin{aligned} A. \quad h &= \frac{v_0^2}{4g} = 2,5\text{m}; & B. \quad h &= \frac{v_0}{2g} = 0,5\text{m}; \\ C. \quad h &= \frac{v_0^2}{g} = 10\text{m}; & D. \quad h &= \frac{2v_0^2}{g} = 20\text{m}; \\ E. \quad h &= v_0 = 10\text{m}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.19. *Puterea este egală cu:*

$$\begin{aligned} A. \quad \frac{L}{t}; & \quad B. \quad \frac{mv^2}{t}; & C. \quad Ft; \\ D. \quad \frac{F}{v}; & \quad E. \quad \frac{L}{Ft}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.20. *Un corp de masă $m=3 \text{ kg}$ cade liber dintr-un punct aflat la înălțimea $h=7 \text{ m}$ față de suprafața pământului. Care este energia potențială E_p a corpului după ce a parcurs o distanță $h_1 = \frac{h}{3}$? Se consideră $g = 10 \text{ m/s}^2$.*

$$\begin{aligned} A. \quad E_p &= 140\text{J}; & B. \quad E_p &= 70\text{J}; & C. \quad E_p &= 210\text{J}; \\ D. \quad E_p &= 315\text{J}; & E. \quad E_p &= 105\text{J}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.21. *Precizați care dintre afirmațiile următoare, referitoare la sistemele mecanice, este adevărată:*

- A. *lucrul mecanic al forțelor conservative este egal cu diferența dintre energia cinetică și cea potențială ale acestuia;*
- B. *lucrul mecanic al forțelor conservative este egal cu variația energiei mecanice a acestuia;*
- C. *lucrul mecanic al forțelor conservative este egal și de semn opus cu variația energiei mecanice a acestuia;*
- D. *lucrul mecanic al forțelor conservative este egal cu variația energiei potențiale a acestuia;*
- E. *lucrul mecanic al forțelor conservative este egal și de semn opus cu variația energiei potențiale a acestuia.*

PROBLEMA 2.22. *Lucrul mecanic al forței elastice este:*

$$\begin{aligned} A. \quad L &= \frac{kx^2}{2}; & B. \quad L &= \frac{kx}{2}; & C. \quad L &= \frac{x\sqrt{k}}{2}; \\ D. \quad L &= kx; & E. \quad L &= -\frac{kx^2}{2}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 2.23. *Care din următoarele definiții este incorectă?*

- A. *energia cinetică a unui corp de masă m , care se află în mișcare de translație cu viteza v , în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu semiprodusul dintre masa corpului și pătratul vitezei acestuia;*
- B. *variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații;*
- C. *lucrul mecanic efectuat de către forțele conservative care acționează în sistem este egal și de semn opus cu energia potențială a acestuia;*

D. energia mecanică, $E = E_c + E_p$, a unui sistem izolat în care acționează forțe conservative este constantă, deci energia mecanică a acestui sistem se conservă;

E. energia este o mărime fizică scalară ce caracterizează capacitatea unui corp sau a unui sistem de corpuri de a produce lucru mecanic.

PROBLEMA 2.24. Un corp de masă $m=1\text{kg}$ alunecă un timp de 2 secunde pe un plan înclinat de lungime $l=4\text{m}$, pornind din repaus din punctul de înălțime maximă al planului înclinat. Unghiul dintre planul înclinat și orizontală este $\alpha = 30^\circ$. Se cere să se găsească lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor de frecare, în timpul coborârii pe planul înclinat și randamentul planului înclinat.

A. $L_f = m \left(g \sin \alpha - \frac{2l}{t^2} \right) = 3J;$

B. $L_f = ml (g \sin \alpha - l) = 4J;$

C. $L_f = ml \sin \alpha = 2J;$

D. $L_f = ml \left(g - \frac{2l}{t^2} \right) = 32J;$

E. $L_f = ml \left(g \sin \alpha - \frac{2l}{t^2} \right) = 12J.$

PROBLEMA 2.25. Energia potențială a unui resort depinde de:

A. lungimea inițială a resortului;

B. natura materialului din care este realizat resortul;

C. sistemul de referință ales;

D. starea de comprimare sau întindere;

E. pătratul constantei elastice a resortului.

PROBLEMA 2.26. Sarcina electrică nu are una din următoarele proprietăți:

A. produce în jurul său un câmp electric;

B. este acționată de o forță, dacă se află în câmp electric;

C. este o mărime fizică scalară;

D. poate avea orice valoare numerică reală;

E. se conservă într-un sistem fizic izolat electric.

PROBLEMA 2.27. Forța de atracție dintre două sarcini punctiforme încărcate poate fi calculată folosind:

A. legea a II-a lui Newton;

B. legea lui Coulomb;

C. legea lui Joule;

D. legea lui Ohm;

PROBLEMA 2.28. Formula legii lui Coulomb este:

A. $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r};$ B. $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^3} \vec{r};$ C. $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \vec{r};$

D. $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^3} \vec{r};$ E. $F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^3} \vec{r}.$

PROBLEMA 2.29. Un condensator plan încărcat electric este introdus într-un lichid cu permitivitatea electrică relativă ϵ_r . Dacă se scoate lichidul dintre armăturile condensatorului, atunci intensitatea câmpului electric dintre armăturile condensatorului:

A. scade de $2\epsilon_r$ ori;

B. devine egală cu zero;

- C. crește de ε_r ori;
- D. nu se modifică;
- E. crește de $2\varepsilon_r$ ori.

PROBLEMA 2.30. Tensiunea electrică între două puncte A și B situate la distanța $d = 10\text{cm}$ într-o regiune a spațiului în care există un câmp electric uniform de intensitate $E = 10^4\text{V/m}$ este $U = 500\text{V}$. Despre orientarea liniilor de câmp față de segmentul AB se poate afirma că:

- A. sunt perpendiculare pe AB;
- B. sunt paralele cu AB;
- C. fac un unghi egal cu $\frac{\pi}{3}$ cu segmentul AB;
- D. fac un unghi egal cu $\frac{\pi}{6}$ cu segmentul AB;
- E. fac un unghi egal cu 45° cu segmentul AB.

PROBLEMA 2.31. Care din următoarele mărimi este vectorială:

- A. potențialul electric;
- B. tensiunea electrică;
- C. intensitatea câmpului electric;
- D. fluxul electric;
- E. sarcina electrică.

PROBLEMA 2.32. Specificați care dintre afirmațiile următoare este falsă:

- A. un conductor electrizat, a cărui sarcină electrică liberă este în repaus, se află în echilibru electrostatic;
- B. în interiorul unui conductor aflat în echilibru electrostatic intensitatea câmpului electrostatic este nulă;
- C. conductorii aflați în echilibru electrostatic se caracterizează prin absența sarcinilor electrice libere în interiorul lor;
- D. vectorul intensitate a câmpului electrostatic și forța electrică ce se exercită asupra sarcinilor cu care este încărcat conductorul aflat în echilibru electrostatic sunt tangente la suprafața conductorului;
- E. suprafața unui conductor izolat este o suprafață echipotențială.

PROBLEMA 2.33. În cazul câmpului electric creat de o sarcină punctiformă, diferența de potențial dintre două puncte M și N, $U = V_M - V_N$, este dată de relația:

- A. $\frac{Qq}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N} \right)$;
- B. $\frac{Q}{4\pi\varepsilon q} \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N} \right)$;
- C. $QL_{M \rightarrow N}$;
- D. $\frac{q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r_M^2} - \frac{1}{r_N^2} \right)$;
- E. $\frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_N} \right)$.

PROBLEMA 2.34. Să se determine intensitatea câmpului electric produs de un nucleu de hidrogen la o distanță $a = 5,3 \cdot 10^{-11}\text{m}$. Se dă $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{F/m}$; sarcina electrică elementară $q = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$.

- A. $E = 2,6 \cdot 10^7\text{V/m}$;
- B. $E = 5,1 \cdot 10^{11}\text{V/m}$;
- C. $E = 3,9 \cdot 10^4\text{V/m}$;
- D. $E = 2,8 \cdot 10^{-4}\text{V/m}$;
- E. $E = 3,7 \cdot 10^4\text{V/m}$;

PROBLEMA 2.35. Două sarcini electrice pozitive $q_1 = 4q$ și $q_2 = 9q$ se află una față de alta la distanța $d = 1m$. Punctul în care intensitatea câmpului electric produs de cele două sarcini se anulează este la distanța:

- A. $x = 0,5m$ între sarcini;
- B. $x = 0,4m$ de sarcina q_1 , între sarcini;
- C. $x = \frac{2}{3}m$ de partea lui q_1 , în exterior;
- D. $x = 5m$ de partea lui q_1 , în exterior;
- E. $x = 1m$ de partea lui q_2 , în exterior.

PROBLEMA 2.36. Lucrul mecanic efectuat la deplasarea sarcinii electrice $q = 10^{-7}C$ între punctele A și B în câmpul electric creat de sarcina electrică $Q = 3 \cdot 10^{-3}C$, aflată în punctul O ($OA = r_1 = 0,3m$; $OB = r_2 = 90cm$; $4\pi\epsilon = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{F}{m}$) are valoarea:

- A. $L = 0,1J$;
- B. $L = 2mJ$;
- C. $L = 1J$;
- D. $L = 5J$;
- E. $L = 6J$.

PROBLEMA 2.37. Trei condensatoare, cu capacitățile de $20\mu F$, $40\mu F$ și $120\mu F$ sunt conectate în serie. Ce capacitate are gruparea:

- A. $180\mu F$;
- B. $120\mu F$;
- C. $18\mu F$;
- D. $12\mu F$;
- E. $\frac{1}{12}\mu F$.

PROBLEMA 2.38. Masa de substanță depusă la catodul unui dispozitiv de electroliză este:

- A. independentă de durata procesului de electroliză;
- B. direct proporțională cu temperatura electrolitului;
- C. independentă de intensitatea curentului electric din circuit;
- D. direct proporțională cu sarcina electrică transportată prin circuit;
- E. independentă de natura electronului.

PROBLEMA 2.39. Care este rezistența adițională R_a conectată la un voltmetru de rezistență R_V , ce măsoară o tensiune U_V , pentru a putea măsura o tensiune $U = nU_V$:

- A. $R_a = U(n - 1)$;
- B. $R_a = \frac{nU_V}{R_V}$;
- C. $R_a = \frac{U_V(n - 1)}{R_V}$;
- D. $R_a = R_V(n - 1)$;
- E. $R_a = \frac{R_V}{n - 1}$.

PROBLEMA 2.40. Care este valoarea în Jouli a unui kWh:

- A. $4,18 \cdot 10^3 J$;
- B. $3,6 \cdot 10^6 J$;
- C. $7,1 \cdot 10^6 J$;
- D. $2,9 \cdot 10^5 J$;
- E. $5,7 \cdot 10^4 J$.

PROBLEMA 2.41. Cum se conectează un voltmetru într-un circuit electric:

- A. în serie;
- B. în paralel;
- C. având în paralel pe el un condensator pentru protecție;
- D. lângă sursa electrică;
- E. în partea opusă sursei electrice.

PROBLEMA 2.42. De câte ori scade puterea unui bec electric dacă se reduce la jumătate tensiunea de alimentare (se presupune că rezistența filamentului este $R = \text{const.}$)?

- A. De două ori.
 B. De patru ori.
 C. De trei ori.
 D. Nu scade.
 E. Crește de două ori.

PROBLEMA 2.43. O baterie are t.e.m. de $32V$, iar bornele ei se unesc printr-un fir lung de $3m$. În fir se produce o cădere de potențial de $30V$ și se consumă o putere de $6W$. Ce lungime trebuie să aibă firul ca diferența de potențial între capetele lui să fie de $12V$?

- A. $6m$; B. $4m$; C. $0,5m$;
 D. $0,12m$; E. $0,75m$.

PROBLEMA 2.44. Care este expresia forței electromagnetice?

- A. $F = \frac{BI}{l} \sin \alpha$; B. $F = BIl \sin \alpha$;
 C. $F = \frac{B}{lI} \sin \alpha$; D. $F = \frac{BI}{l \sin \alpha}$; E. $F = \frac{BIl}{\sin \alpha}$.

PROBLEMA 2.45. Un solenoid cu lungimea l , care are N spire, este parcurs de un curent I . În interiorul solenoidului nu se găsește nimic. Inducția magnetică B în interiorul solenoidului este:

- A. $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$; B. $B = \mu_0 \mu_r \frac{NI}{l}$; C. $B = \mu_r \frac{NI}{l}$;
 D. $B = \frac{\mu_0 NI}{I^2}$; E. $B = 0$.

PROBLEMA 2.46. În cazul unui conductor rectiliniu lung, ce relație nu este corectă pentru inducția magnetică:

- A. $B = k \frac{I}{r}$; B. $B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$; C. $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$;
 D. $B = \mu_0 \frac{I}{2r}$; E. $B = \frac{\mu_0 \mu_r I}{\pi 2r}$.

PROBLEMA 2.47. Forța Lorentz are expresia:

- A. $F = BIlv$; B. $F = qlB \sin \alpha$; C. $F = qvB \sin \alpha$;
 D. $F = qE$; E. $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon r^2}$.

PROBLEMA 2.48. Prin două conductoare paralele de lungime infinită circulă doi curenți $I_1 = 1A$ și $I_2 = 2A$, distanța dintre ele fiind $d_1 = 10cm$. Forța de interacțiune dintre ele (raportată la unitatea de lungime) este F_1 . Dacă intensitățile curenților devin $I_1 = 6A$ și $I_2 = 10A$, iar distanța dintre ele devine $d_2 = 2cm$, atunci forța de interacțiune pe unitate de lungime va fi F_2 . Raportul $n = \frac{F_2}{F_1}$ este:

- A. $n = 150$; B. $n = 120$; C. $n = 15$; D. $n = 12$;
 E. $n = 30$.

PROBLEMA 2.49. Un solenoid are $N = 100$ spire, lungimea $l = 5cm$ și aria secțiunii cilindrice $A = 0,3cm^2$. Știind că $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} Tm/A$, inductanța solenoidului va fi aproximativ egală cu:

- A. $6\mu H$; B. $6,5\mu H$; C. $7\mu H$;
 D. $7,5\mu H$; E. $8\mu H$.

PROBLEMA 2.50. Un conductor cu lungimea de $1m$, parcurs de un curent de $5A$, se află într-un câmp de inducție magnetică de $1,5T$. Direcția conductorului face cu direcția liniilor de câmp un unghi de 30° . Să se determine forța F la care este supus conductorul:

- A. $F = 7N$; B. $F = 5,25N$; C. $F = 3,75N$;
 D. $F = 7,5N$; E. $F = 5N$.

PROBLEMA 2.51. O particulă încărcată electric cu sarcina q , care intră cu viteza \vec{v} într-un câmp magnetic de \vec{B} , perpendicular pe acesta, descrie o mișcare circulară. Raza traiectoriei și frecvența mișcării circulare sunt date de expresiile:

- A. $r = \frac{mv^2}{2qB}$ $v = \frac{qB}{2\pi m}$;
 B. $r = \frac{mv^2}{qB}$ $v = \frac{qB}{m}$;
 C. $r = \frac{mv}{qB}$ $v = \frac{m}{qB}$;
 D. $r = \frac{mv^2}{\pi B}$ $v = \frac{qBm}{r}$;
 E. $r = \frac{mv}{qB}$ $v = \frac{qB}{2\pi m}$.

PROBLEMA 2.52. Un avion zboară paralel cu suprafața pământului cu viteza $v = 1080Km/h$. Anvergura aripilor este $12m$, iar componenta verticală a câmpului magnetic terestru este $B_V = 0,5 \cdot 10^{-4}T$. Ce diferență de potențial apare între vârfulurile aripilor sale?

- A. $1V$; B. $10^{-3}V$; C. $0,180V$;
 D. $0,4V$; E. $10V$.

RĂSPUNSURI

2.1	D	2.27	B
2.2	A	2.28	A
2.3	A	2.29	C
2.4	D	2.30	C
2.5	C	2.31	C
2.6	C	2.32	D
2.7	E	2.33	E
2.8	B	2.34	B
2.9	E	2.35	B
2.10	A	2.36	E
2.11	A	2.37	D
2.12	C	2.38	D
2.13	A	2.39	D
2.14	A	2.40	B
2.15	D	2.41	B
2.16	B	2.42	B
2.17	A	2.43	D
2.18	A	2.44	B
2.19	A	2.45	A
2.20	A	2.46	D
2.21	E	2.47	C
2.22	E	2.48	A
2.23	C	2.49	D
2.24	E	2.50	C
2.25	B	2.51	E
2.26	D	2.52	C